

Ściągi maturalne, *ale make it pink*

17 kartek — jedna na dział, wszystko z arkusza wzorów CKE
przepisane po ludzku. Poziom podstawowy, z warunkami,
wskazówkami i przykładem, żebyś wiedziała nie tylko *co*, ale i
kiedy wstawić.

01 Wartość bezwzględna

02 Potęgi i pierwiastki

03 Logarytmy

04 Silnia i symbol Newtona

05 Wzór dwumianowy Newtona

06 Wzory skróconego mnożenia

07 Funkcja kwadratowa

08 Ciągi

09 Trygonometria

10 Planimetria

11 Geometria analityczna

12 Stereometria

13 Kombinatoryka

14 Prawdopodobieństwo

15 Statystyka

16 Pochodna funkcji

17 Tablica wartości trygonometrycznych

Wartość bezwzględna

01

DEFINICJA

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Po ludzku: odległość liczby x od zera na osi liczbowej.
Odległość nigdy nie jest ujemna.

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

$$|x| \geq 0 \quad | -x| = |x| \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

DZIAŁANIA

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

dla dzielenia: $y \neq 0$

NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

Uwaga: modułu nie rozbijamy na sumę — tu jest tylko nierówność.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z MODUŁEM

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r$$

jeden przedział w środku — domykasz z dwóch stron

Warunek: $r \geq 0$. Czytaj to jako: „odległość x od a jest nie większa / nie mniejsza niż r ”.

$$|x - a| \geq r \iff x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r$$

dwa przedziały na zewnątrz — spójnik „lub”

♦ WSKAZÓWKA

Zawsze rysuj oś i zaznaczaj środek a oraz promień r . Nierówność z modułem to zdanie o odległości — jak to zobaczysz na osi, nie pomylisz „i” z „lub”.

PRZYKŁAD

$$|x - 3| \leq 5$$

środek 3, promień 5, więc

$$-2 \leq x \leq 8 \implies x \in \langle -2, 8 \rangle$$

Potęgi i pierwiastki

02

DEFINICJE

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

dla $a \neq 0$ — zera do potęgi ujemnej nie ma

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0)$$

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

dla $a, b > 0$; przy wykładnikach całkowitych wystarczy $a, b \neq 0$

PIERWIASTKI

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$

Stopień parzysty: tylko z liczb ≥ 0 . Stopień nieparzysty: można z ujemnych.

NIERÓWNOŚCI WYKŁADNICZE

$$a > 1: \quad a^x < a^y \iff x < y$$

$$0 < a < 1: \quad a^x < a^y \iff x > y$$

Podstawa mniejsza od 1 $\rightarrow$ odwracasz znak. To tu ginie najwięcej punktów.

✦ WSKAZÓWKA

Zanim cokolwiek policzysz, sprowadź wszystko do jednej podstawy: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $\sqrt{2} = 2^{1/2}$.
Wtedy zadanie robi się samo.

PRZYKŁAD

$$\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{-1}}{2^{-2}} = \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-2}}{2^{-2}} = 2^2 = 4$$

Logarytmy

03

DEFINICJA

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Warunki, bez których nie ma logarytmu: podstawa $a > 0$, $a \neq 1$ i liczba logarytmowana $b > 0$. Po ludzku: „do której potęgi podnieść a , żeby dostać b ”.

WARTO ZNAĆ NA PAMIĘĆ

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^r = r$$

$\log x$ i $\lg x$ to zawsze $\log_{10} x$

ZAMIANA PODSTAWY

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

DZIAŁANIA – DLA $X > 0$, $Y > 0$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

Mnożenie w środku $\rightarrow$ dodawanie na zewnątrz. Dzielenie $\rightarrow$ odejmowanie. Potęga $\rightarrow$ wyskakuje przed logarytm.

✦ WSKAZÓWKA

Nie ma wzoru na $\log_a (x + y)$ – i nigdy nie będzie. Jeśli w zadaniu jest suma *wewnątrz* logarytmu, to trzeba ją najpierw rozłożyć na iloczyn.

PRZYKŁAD

$$\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = 4$$

LOGARYTMY, KTÓRE POLICZYSZ W GŁOWIE

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 81 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log_5 \frac{1}{25} = -2$$

Metoda jest zawsze ta sama: zapisz liczbę logarytmowaną jako potęgę podstawy, a wykładnik jest odpowiedzią. Ułamek daje wykładnik ujemny.

Silnia i symbol Newtona

04

SILNIA

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1 \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$$

SYMBOL NEWTONA

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dla liczb całkowitych $0 \leq k \leq n$. Czytamy: „n po k”.

SZYBSZA WERSJA DO LICZENIA

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

W liczniku dokładnie k czynników, licząc w dół od n .

WARTOŚCI, KTÓRE WARTO ZNAĆ

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

WŁASNOŚCI

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

symetria — wybrać 3 z 10 to to samo, co odrzucić 7

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

to jest reguła trójkąta Pascala

♦ WSKAZÓWKA

Nigdy nie licz 50!. Skracaj silnie: $\frac{50!}{48!} = 50 \cdot 49$.

Kalkulator się nie przyda, głowa tak.

PRZYKŁAD

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$$

TRÓJKĄT PASCALA — KAŻDA LICZBA TO SUMA DWÓCH NAD NIĄ

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Wiersz numer n (licząc od zera) to wszystkie $\binom{n}{k}$ po kolei — szybsze niż liczenie silni, gdy n jest małe.

Wzór dwumianowy Newtona

05

SUMA

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

RÓŻNICA

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

Znaki naprzemiennie: $+, -, +, - \dots$ — o to dba czynnik $(-1)^k$.

WYRAZ OGÓLNY ROZWINIĘCIA

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Suma wykładników w każdym wyrazie zawsze daje n .
Numer wyrazu to $k + 1$, nie k .

TRÓJKĄT PASCALA — WSPÓŁCZYNNIKI

$$n = 2 : 1 \ 2 \ 1$$

$$n = 3 : 1 \ 3 \ 3 \ 1$$

$$n = 4 : 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1$$

$$n = 5 : 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1$$

♦ WSKAZÓWKA

Jeśli zadanie pyta o jeden konkretny wyraz (np. „współczynnik przy x^{4n} ”), nie rozwijaj całego nawiasu. Ustal k z wykładnika i wstaw do wzoru na T_{k+1} — jedna linijka zamiast strony.

PRZYKŁAD — WSPÓŁCZYNNIK PRZY x^3 W $(2x + 1)^5$

$$T_{k+1} = \binom{5}{k} (2x)^{5-k} \cdot 1^k, \quad 5 - k = 3 \Rightarrow k = 2$$

$$\binom{5}{2} (2x)^3 = 10 \cdot 8x^3 = 80x^3 \quad \Rightarrow \quad \text{współczynnik } 80$$

Wzory skróconego mnożenia

06

KWADRATY

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

SZEŚCIANY

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

RÓŻNICA KWADRATÓW

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Najczęściej używany wzór całej matury. Suma kwadratów się nie rozkłada.

SUMA I RÓŻNICA SZEŚCIANÓW

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

WERSJE Z JEDYNKĄ – PRZYDAJĄ SIĘ PRZY SKRACANIU UŁAMKÓW

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$$

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

✦ WSKAZÓWKA

Te wzory czytaj w obie strony. Zwijanie ($a^2 - b^2 \rightarrow \text{iloczyn}$) jest na maturze ważniejsze niż rozwijanie — bo dopiero iloczyn można skrócić albo przyrównać do zera.

PRZYKŁAD

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

z założeniem $x \neq 3$ — o dziedzinie zawsze piszemy

TRZY PUŁAPKI, NA KTÓRYCH TRACI SIĘ PUNKTY

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

brakuje środkowego $2ab$

$$a^2 + b^2$$

sumy kwadratów nie da się rozłożyć

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$

pierwiastek nie „wchodzi” w sumę

KWADRAT SUMY TRZECH SKŁADNIKÓW

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Reguła: kwadraty wszystkich składników plus podwojone iloczyny każdej pary.

Funkcja kwadratowa

07

TRZY POSTACIE – TA SAMA FUNKCJA

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ogólna, $a \neq 0$

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

kanoniczna – widać wierzchołek

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

iloczynowa – tylko gdy $\Delta \geq 0$

WYRÓŻNIK I PIERWIĄSTKI

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 : \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$$

LICZBA ROZWIĄZAŃ

 $\Delta > 0 \rightarrow$ dwa różne pierwiastki $\Delta = 0 \rightarrow$ jeden pierwiastek (podwójny) $\Delta < 0 \rightarrow$ brak pierwiastków rzeczywistych

WIERZCHOŁEK PARABOLI

$$W = (p, q), \quad p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

 $a > 0 \rightarrow$ ramiona w górę, q to minimum. $a < 0 \rightarrow$ ramiona w dół, q to maksimum.

WZORY VIËTE'A (GDY $\Delta \geq 0$)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Idealne, gdy pytają o znaki pierwiastków albo o sumę bez liczenia Δ .

♦ WSKAZÓWKA

Nierówność kwadratowa: policz pierwiastki, narysuj parabolę, zaznacz gdzie jest nad/pod osią. Nie ma sensu tego zgadywać – rysunek zajmuje 10 sekund i ratuje wynik.

PRZYKŁAD

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad \Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad W = (2, -1)$$

CIĄG ARYTMETYCZNY – N-TY WYRAZ

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

r to różnica: $r = a_{n+1} - a_n$

CIĄG GEOMETRYCZNY – N-TY WYRAZ

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

q to iloraz: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, wyrazy $\neq 0$

SUMA N WYRAZÓW – ARYTMETYCZNY

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

SUMA N WYRAZÓW – GEOMETRYCZNY

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$S_n = n \cdot a_1 \quad (q = 1)$$

WARUNEK NA TRZY SĄSIEDNIE WYRAZY

arytm.: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

geom.: $(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

dla $n \geq 2$ – tym sprawdzasz, czy ciąg jest arytmetyczny/geometryczny

PROCENT SKŁADANY

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

To ciąg geometryczny w przebraniu. Przy kapitalizacji częstszej niż roczna dziel p przez liczbę okresów w roku i mnoż n .

♦ WSKAZÓWKA

Prawie każde zadanie z ciągów sprowadza się do układu dwóch równań z a_1 i r (albo q). Wypisz co wiesz, podstaw do wzoru na a_n – i masz układ.

PRZYKŁAD

Arytmetyczny: $a_1 = 3$, $r = 4$

$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 4 = 39$$

$$S_{10} = \frac{3 + 39}{2} \cdot 10 = 210$$

Trygonometria

09

W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM

$$\sin \alpha = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{przeciwległa}}{\text{przyległa}}$$

DOWOLNY KĄT – PUNKT $M(X, Y)$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

TOŻSAMOŚCI PODSTAWOWE

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

dla $\cos \alpha \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$

KĄT PODWOJONY

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

WZORY REDUKCYJNE – NAJCZĘŚCIEJ UŻYWANE

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

♦ WSKAZÓWKA

Znasz jedną funkcję, chcesz drugą? Wstaw do $\sin^2 + \cos^2 = 1$ i uważaj na znak – w I ćwiartce wszystko dodatnie, dalej patrz na ćwiartkę.

PRZYKŁAD

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \text{ ostry:}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Planimetria

10

TWIERDZENIE PITAGORASA

$$a^2 + b^2 = c^2$$

tylko w trójkącie prostokątnym, c to przeciwprostokątna. Działa też odwrotnie – sprawdzasz nim kąt prosty.

TWIERDZENIE SINUSÓW I COSINUSÓW

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

POLE TRÓJKĄTA – WYBIERZ WZÓR DO DANYCH, JAKIE MASZ

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h_a$$

bok i wysokość

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

dwa boki i kąt między nimi

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = p \cdot r$$

z okręgiem opisanym / wpisanym, $p = \frac{a+b+c}{2}$

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY O BOKU a

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \quad R = \frac{2}{3}h$$

KOŁO I WYCINEK

$$P = \pi r^2 \quad L = 2\pi r$$

$$P_{\text{wyc}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 \quad L_{\text{luk}} = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r$$

CZWOROKĄTY – POLA

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

trapez

$$P = ah = ab \sin \alpha$$

równoległobok

$$P = a^2 \sin \alpha$$

romb

$$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

romb / deltoid (przekątne)

KĄTY I OKRĘGI

Kąt wpisany = połowa kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Kąt oparty na półokręgu = 90° . Odcinki stycznych z jednego punktu są równe.

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$

✦ WSKAZÓWKA

Okrąg opisany na czworokącie: przeciwległe kąty dają 180° . Okrąg wpisany: sumy przeciwległych boków są równe ($a + c = b + d$). Te dwa warunki to gotowe punkty.

Geometria analityczna

11

ODCINEK

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

PROSTA

$$y = ax + b \quad a = \operatorname{tg} \alpha$$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (x_A \neq x_B)$$

$$Ax + By + C = 0$$

RÓWNOLEGŁE I PROSTOPADŁE

$$\parallel: a_1 = a_2 \quad \perp: a_1 \cdot a_2 = -1$$

w postaci ogólnej: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ oraz $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

PROSTA PRZEZ PUNKT (X_0, Y_0)

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Najszybszy sposób na równanie prostej, gdy znasz nachylenie i jeden punkt.

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Prostą musisz mieć w postaci ogólnej — przenieś wszystko na jedną stronę.

OKRĄG

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

środek $S = (a, b)$, promień $r > 0$. Z postaci ogólnej dochodzisz przez uzupełnianie do kwadratu.

WEKTORY

$$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI TRÓJKĄTA

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Przesunięcie o $[a, b]$: $P' = (x + a, y + b)$

PRZYKŁAD — PROSTA PRZEZ $A(1, 2)$ I $B(5, 10)$

$$a = \frac{10 - 2}{5 - 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2(x - 1) + 2 = 2x$$

Stereometria

12

Oznaczenia: P_p – pole podstawy, P_b – pole boczne, P_c – pole całkowite, V – objętość, h – wysokość.

PROSTOPADŁOŚCIAN I GRANIASTOSŁUP PROSTY

$$V = abc \quad P_c = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = P_p \cdot h \quad P_b = Ob \cdot h$$

Ob – obwód podstawy

OSTROSŁUP

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$$

Każda bryła „ze szpicem” ma $\frac{1}{3}$ z przodu. Pole boczne = suma pól ścian, licząc z trójkątów.

WALEC

$$V = \pi r^2 h$$

$$P_b = 2\pi r h \quad P_c = 2\pi r(r + h)$$

STOŻEK

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$P_b = \pi r l \quad P_c = \pi r(r + l)$$

l – tworząca, $l^2 = r^2 + h^2$

KULA

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad P_c = 4\pi r^2$$

SKALA PODOBIENSTWA K

$$\frac{P_2}{P_1} = k^2 \quad \frac{V_2}{V_1} = k^3$$

Długości $\times k$, pola $\times k^2$, objętości $\times k^3$.

♦ WSKAZÓWKA

Zadanie ze stereometrii prawie zawsze rozwiązuje się na płaskim rysunku: wyciągnij z bryły jeden trójkąt prostokątny (wysokość, promień, tworząca albo przekątna) i pracuj na nim Pitagorasem lub trygonometrią. Bryła to tylko opakowanie.

Kombinatoryka

13

PERMUTACJE — USTAWIAMY WSZYSTKIE

 $n!$

Ile ustawień n różnych elementów w ciąg. Np. ile sposobów posadzenia 5 osób w rzędzie: $5! = 120$.

KOMBINACJE — WYBIERAMY, KOLEJNOŚĆ NIEWAŻNA

$$\binom{n}{k}$$

Ile sposobów wybrania k elementów z n . Np. losowanie 3 osób z 10 do komisji.

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

 n^k

Ciąg k -wyrazowy z n elementów, elementy mogą się powtarzać. Np. kod PIN: 10^4 .

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Ciąg k różnych wyrazów. Np. medale (złoto/srebro/brąz) dla 8 zawodniczek.

JAK WYBRAĆ WZÓR — DWA PYTANIA

1. Czy kolejność ma znaczenie?

Tak → wariacje / permutacje.

Nie → kombinacje $\binom{n}{k}$.

2. Czy elementy mogą się powtarzać?

Tak → n^k .

Nie → $\frac{n!}{(n-k)!}$ albo $\binom{n}{k}$.

♦ WSKAZÓWKA

Reguła mnożenia jest silniejsza niż wszystkie wzory: jeśli wybór składa się z etapów, mnożysz liczby możliwości w etapach. Większość zadań da się zrobić tak, bez nazywania wzoru.

PRZYKŁAD

Ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach?

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

pierwsza cyfra nie może być zerem — dlatego 9, nie 10

Prawdopodobieństwo

14

KLASYCZNA DEFINICJA

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Warunek: wszystkie zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne, a Ω skończone. Licznik: zdarzenia sprzyjające. Mianownik: wszystkie możliwe.

WŁASNOŚCI

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$

SUMA ZDARZEŃ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Odejmujemy część wspólną, żeby nie liczyć jej dwa razy. Dla zdarzeń rozłącznych $P(A \cap B) = 0$.

ZDARZENIA NIEZALEŻNE

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Np. dwa rzuty kostką, losowanie ze zwracaniem.

SCHEMAT BERNOULLEGO · ROZSZERZENIE

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p$$

Dokładnie k sukcesów w n niezależnych próbach.

♦ WSKAZÓWKA

Widzisz „co najmniej jeden”? Licz przez zdarzenie przeciwne: $1 - P(\text{żaden})$. Prawie zawsze o połowę mniej pracy.

PRZYKŁAD – DWA RZUTY KOSTKĄ, SUMA OCZEK RÓWNA 8

$|\Omega| = 36$, sprzyjające: $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Statystyka

15

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

ŚREDNIA WAŻONA

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n}$$

to samo, co średnia z ocen z wagami w dzienniku

MEDIANA

Dane ustaw rosnąco. Dla n nieparzystego — wyraz środkowy. Dla n parzystego — średnia dwóch środkowych.

Bez posortowania mediana zawsze wychodzi źle.

DOMINANTA I ROZSTĘP

Dominanta (moda) — wartość występująca najczęściej.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

WARIANCJA I ODCHYLENIE STANDARDOWE

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Kolejność działań: najpierw średnia, potem odchylenia od średniej, potem kwadraty, potem średnia z kwadratów, na końcu pierwiastek. Odchylenie standardowe mówi, jak bardzo dane są rozrzucone wokół średniej.

♦ WSKAZÓWKA

Jeśli wszystkie dane są takie same, to $\sigma = 0$. I odwrotnie: $\sigma = 0$ oznacza, że nic się nie różni. Dobry szybki test poprawności wyniku.

PRZYKŁAD — DANE 2, 4, 4, 6

$$\bar{x} = 4, \quad \text{mediana} = 4, \quad \text{dominanta} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{4 + 0 + 0 + 4}{4} = 2, \quad \sigma = \sqrt{2}$$

CO SIĘ DZIEJE, GDY ZMIENISZ WSZYSTKIE DANE NARAZ

Dodajesz do każdej danej liczbę c

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} + c, \quad \sigma \rightarrow \sigma$$

Średnia się przesuwą, rozrzut zostaje ten sam — bo odległości między danymi się nie zmieniły.

Mnożysz każdą daną przez c

$$\bar{x} \rightarrow c\bar{x}, \quad \sigma \rightarrow |c| \cdot \sigma$$

Rozciągasz dane, więc rozrzut rośnie tyle samo razy. Wartość bezwzględna, bo odchylenie nie bywa ujemne.

Pochodna funkcji

16

POCHODNE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

DZIAŁANIA

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

STYCZNA DO WYKRESU W PUNKCIE x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ to współczynnik kierunkowy stycznej, czyli tg kąta nachylenia.

MONOTONICZNOŚĆ I EKSTREMA

$f'(x) > 0$ na przedziale $\rightarrow$ funkcja rosnąca

$f'(x) < 0$ na przedziale $\rightarrow$ funkcja malejąca

Ekstremum może być tylko tam, gdzie $f'(x) = 0$. Jest ekstremum tylko wtedy, gdy pochodna zmienia znak:
 $z + na - \rightarrow$ maksimum, $z - na + \rightarrow$ minimum.

♦ WSKAZÓWKA

Zadania optymalizacyjne („największa objętość / najmniejszy koszt”) zawsze mają ten sam schemat: zapisz wielkość jako funkcję jednej zmiennej, ustal dziedzinę, policz $f' = 0$, zrób tabelkę znaków. Nie zapomnij o dziedzinie — tam ginie punkt.

PRZYKŁAD

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$x = -1 \text{ (max)}, \quad x = 1 \text{ (min)}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych 17

KĄTY, KTÓRE MUSISZ MIEĆ W GŁOWIE

KĄT	0°	30°	45°	60°	90°
radiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

PRZYBLIŻENIA, WARTO MIEĆ POCZUCIE SKALI

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad \sqrt{3} \approx 1,73$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

STOPNIE ↔ RADYANY

$$180^\circ = \pi \quad \Rightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

Ze stopni na radiany: mnoż przez $\frac{\pi}{180}$. Z radianów na stopnie: mnoż przez $\frac{180}{\pi}$.

✦ JAK TO ZAPAMIĘTAĆ BEZ WKUWANIA

Sinus rośnie od 0 do 1, cosinus maleje od 1 do 0 — to ta sama czwórka liczb, tylko czytana w drugą stronę: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1. Tangens to zawsze $\frac{\sin}{\cos}$, więc przy 90° dzielisz przez zero — dlatego nie istnieje.

ZNAKI W ĆWIARTKACH

ćwiartka	I	II	III	IV
$\sin$	+	+	−	−
$\cos$	+	−	−	+
tg	+	−	+	−

KĄTY POZA PIERWSZĄ ĆWIARTKĄ

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Sprowadź kąt do pierwszej ćwiartki wzorem redukcyjnym, a znak dobierz z tabelki obok.