

Niezbędnik ósmoklasisty

Teoria i wzory w pigułce — ale wytłumaczone tak, żeby było jasne *skąd* się biorą i *kiedy* ich użyć. Do każdego wzoru jest zdanie po ludzku i przykład rozpisany krok po kroku.

01 Kolejność działań

02 Ułamki

03 Liczby ujemne

04 Potęgi

05 Pierwiastki

06 Procenty

07 Wyrażenia i wzory skróconego mnożenia

08 Równania

17 Plan na ostatni tydzień

09 Pola i obwody

10 Kąty

11 Twierdzenie Pitagorasa

12 Trójkąty szczególne

13 Bryły

14 Jednostki i prędkość

15 Średnia, mediana, szansa

16 13 pułapek

Kolejność działań

01

KOLEJNOŚĆ, W KTÓREJ LICZYSZ

1. nawiasy



2. potęgi i pierwiastki



3. mnożenie i dzielenie



4. dodawanie i odejmowanie

Mnożenie i dzielenie są równie ważne — jeśli stoją obok siebie, liczysz je po kolei od lewej do prawej. Dokładnie tak samo dodawanie i odejmowanie. Nie ma zasady „najpierw mnożenie, potem dzielenie”.

PRZYKŁAD KROK PO KROKU

$$2 + 3 \cdot (8 - 5)^2 : 9$$

zaczynamy od nawiasu

$$2 + 3 \cdot 3^2 : 9$$

teraz potęga

$$2 + 3 \cdot 9 : 9$$

mnożenie i dzielenie od lewej: $3 \cdot 9 = 27$

$$2 + 27 : 9 = 2 + 3$$

na końcu dodawanie

$$= 5$$

gotowe

MINUS PRZED NAWIASEM

$$5 - (2x - 3) = 5 - 2x + 3$$

Minus przed nawiasem zmienia znak **każdego** wyrazu w środku. Plus na minus, minus na plus.

$$-(a + b - c) = -a - b + c$$

Wyobraź sobie, że przed nawiasem stoi -1 i mnożysz przez nie wszystko po kolei.

✦ WSKAZÓWKA

Nie licz kilku rzeczy w jednej linijce „w głowie”. Przepisz działanie po każdym kroku — tak jak w przykładzie wyżej. Wygląda na wolniejsze, ale to właśnie tak przestaje się gubić znaki, a na egzaminie za zapisane obliczenia też są punkty.

Ułamki

02

DODAWANIE I ODEJMOWANIE

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

Najpierw wspólny mianownik — czyli ta sama liczba pod kreską. Dopiero wtedy dodajesz same liczniki. Mianownika nie dodajesz.

MNOŻENIE

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Licznik razy licznik, mianownik razy mianownik. Tu wspólny mianownik **nie jest** potrzebny — to najłatwiejsze działanie na ułamkach.

DZIELENIE

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Dzielenie zamieniasz na mnożenie przez odwrotność drugiego ułamka — czyli obracasz go do góry nogami.

SKRACANIE

$$\frac{18}{24} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3}{4}$$

Skracasz tylko to, co jest **mnożone** — nigdy pojedynczego składnika sumy. W $\frac{x+3}{3}$ nie skrócisz nic.

UŁAMEK, PROCENT I LICZBA DZIESIĘTNA TO TO SAMO, INACZEJ ZAPISANE

ułamek	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$
dziesiętne	0,5	0,25	0,75	0,2	0,1	0,(3)
procent	50%	25%	75%	20%	10%	≈33%

Warto znać tę tabelkę na pamięć — w zadaniach z procentami zamiast liczyć „30% z 80” możesz często po prostu podstawić ułamek i policzyć szybciej w głowie.

✦ WSKAZÓWKA

Liczbę mieszaną (np. $2\frac{1}{3}$) zamień na zwykły ułamek **zanim** zaczniesz mnożyć albo dzielić: $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Mnożenie liczb mieszanych „na skróty” prawie zawsze kończy się złym wynikiem.

Liczby ujemne

03

MNOŻENIE I DZIELENIE – REGUŁA ZNAKÓW

$$(-) \cdot (-) = (+) \quad (-) \cdot (+) = (-)$$

Dwa takie same znaki dają plus, dwa różne dają minus. Przy dzieleniu jest dokładnie tak samo.

ODEJMOWANIE LICZBY UJEMNEJ

$$-4 - (-7) = -4 + 7 = 3$$

Dwa minusy obok siebie zamieniają się w plus. „Zabrać dług” znaczy tyle samo, co „dostać”.

DODAWANIE NA OSI LICZBOWEJ – NAJPROSTSZY SPOSÓB, ŻEBY SIĘ NIE POMYLIĆ

$$-3 + 8 = 5$$

Plus = idziesz w prawo. Start na -3 , osiem kroków w prawo, jesteś na 5 .

$$2 - 9 = -7$$

Minus = idziesz w lewo. Start na 2 , dziewięć kroków w lewo, jesteś na -7 .

Przy dodawaniu i odejmowaniu myśl **ruchem po osi**, nie regułą znaków — reguła znaków dotyczy mnożenia i dzielenia. To dwie różne rzeczy i mieszanie ich to najczęstszy błąd w tym dziale.

POTĘGA LICZBY UJEMNEJ

$$(-2)^2 = 4 \quad (-2)^3 = -8$$

Wykładnik **parzysty** → wynik dodatni.

Nieparzysty → ujemny. Bo minusy skracają się parami.

UWAGA NA NAWIAS

$$(-3)^2 = 9 \quad -3^2 = -9$$

Bez nawiasu potęgujesz tylko trójkę, a minus zostaje z przodu. Z nawiasem potęgujesz całe -3 .

✦ WSKAZÓWKA

Jeśli w działaniu jest kilka minusów, policz je: **parzysta** liczba minusów w mnożeniu daje plus, **nieparzysta** daje minus. Np. $(-2)(-3)(-1) = -6$, bo minusów jest trzy.

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA – CZYLI ODLEGŁOŚĆ OD ZERA

$$|5| = 5 \quad |-5| = 5 \quad |0| = 0$$

Dwie pionowe kreski pytają: **jak daleko ta liczba leży od zera** na osi. Odległość nigdy nie jest ujemna, więc wynik zawsze wychodzi dodatni albo zero.

$$|3 - 8| = |-5| = 5$$

Najpierw licz to, co w środku, a dopiero potem zdejmuj minus. Kreski działają jak nawias.

Potęgi

04

CO TO W OGÓLE ZNACZY

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Dolna liczba (podstawa) mówi, co mnożysz. Górna (wykładnik) mówi, ile razy. To wszystko — potęga to skrót na długie mnożenie.

MNOŻENIE POTĘG

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

Ta sama podstawa → wykładniki **dobawasz**.

DZIELENIE POTĘG

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$5^8 : 5^6 = 5^2 = 25$$

Ta sama podstawa → wykładniki **odejmujesz**.

POTĘGA POTĘGI

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(3^2)^4 = 3^8$$

Dwa „daszki” jeden nad drugim → wykładniki **mnożysz**.

POTĘGA ILOCZYNU I ZERO

$$(ab)^n = a^n b^n \quad a^0 = 1$$

Cokolwiek (poza zerem) do potęgi zerowej daje 1.
Nie zero — jedynkę.

NAJWAŻNIEJSZY WARUNEK

Wszystkie te wzory działają tylko wtedy, gdy podstawy są takie same. $2^3 \cdot 5^2$ nie da się skrócić do jednej potęgi. Jeśli podstawy są różne, spróbuj je najpierw ujednolicić: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$.

POTĘGI, KTÓRE WARTO ZNAĆ NA PAMIĘĆ

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

$$11^2 = 121$$

$$12^2 = 144$$

Pierwiastki

05

CO TO ZNACZY

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{bo} \quad 7 \cdot 7 = 49$$

Pierwiastek pyta: jaką liczbę pomnożyć przez samą siebie, żeby dostać to, co jest pod pierwiastkiem.

Pierwiastek sześcienny pyta o to samo, tylko trzy razy: $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

MNOŻENIE I DZIELENIE

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

Np. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

WYŁĄCZANIE PRZED PIERWIASTEK

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Szukasz pod pierwiastkiem kwadratu (4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 100) i wyciągasz go przed znak.

TO JEST NAJCZĘSTSZY BŁĄD W CAŁYM DZIALE

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Sprawdź sam: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, ale $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Pierwiastek „rozbijasz” tylko przy mnożeniu i dzieleniu — nigdy przy dodawaniu i odejmowaniu.

PIERWIASTKI, KTÓRE MUSISZ ZNAĆ NA PAMIĘĆ

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73$$

♦ JAK OSZACOWAĆ PIERWIASTEK, KTÓREGO NIE ZNASZ

Szukasz $\sqrt{40}$? Znajdź najbliższe kwadraty: $36 < 40 < 49$, więc $6 < \sqrt{40} < 7$. Do zadań zamkniętych taka ocena zwykle wystarcza, żeby wskazać dobrą odpowiedź bez liczenia.

Procenty

06

JEDNA RZECZ, KTÓRĄ TRZEBA ZROZUMIEĆ

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Procent to zwykły ułamek o mianowniku 100. „30% z czegoś” znaczy „0,3 razy to coś”. Jeśli to zapamiętasz, wszystkie cztery typy zadań poniżej robią się tym samym zadaniem.

TYP 1 – ILE TO P% Z A

$$a \cdot \frac{p}{100}$$

20% z 150 zł: $150 \cdot 0,2 = 30$ zł.

TYP 2 – JAKIM PROCENTEM A JEST B

$$\frac{b}{a} \cdot 100\%$$

12 z 48 uczniów: $\frac{12}{48} \cdot 100\% = 25\%$.

TYP 3 – PODWYŻKA I OBNIŻKA

$$a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Taniej o 15% to razy 0,85. Drożej o 15% to razy 1,15.

TYP 4 – ZNASZ CZĘŚĆ, SZUKASZ CAŁOŚCI

$$a = \text{część} : \frac{p}{100}$$

Tu się dzieli, nie mnoży. To ten typ, który myli najwięcej osób.

PRZYKŁAD TYPU 4, KROK PO KROKU

Bluza po obniżce o 30% kosztuje 84 zł. Ile kosztowała wcześniej?

- 1 Skoro potaniała o 30%, to 84 zł jest 70% starej ceny (bo $100\% - 30\% = 70\%$).
- 2 Zapisujesz to jako równanie: $0,7 \cdot x = 84$.
- 3 Dzielisz obie strony przez 0,7: $x = 84 : 0,7 = 120$.
- 4 Odp.: bluza kosztowała 120 zł. Sprawdzenie: $120 \cdot 0,7 = 84$ ✓

✦ PUŁAPKA, KTÓRA WRACA CO ROKU

Obniżka o 20%, a potem podwyżka o 20% nie wraca do ceny wyjściowej: $0,8 \cdot 1,2 = 0,96$, czyli jest o 4% taniej. Dlaczego? Bo drugi procent liczy się już od nowej, mniejszej ceny.

Wyrażenia i wzory skróconego mnożenia

07

WYRAZY PODOBNE

$$5x + 3x - 2x = 6x$$

Dodawać można tylko to, co ma tę samą literę w tej samej potęgze. $3x$ i $3x^2$ to różne rzeczy — jak jabłka i gruszki.

MNOŻENIE NAWIASÓW

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$$

Każdy wyraz z pierwszego nawiasu mnożysz przez każdy z drugiego — cztery mnożenia, potem redukujesz.

TRZY WZORY, KTÓRE TRZEBA ZNAĆ NA PAMIĘĆ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

kwadrat sumy

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

kwadrat różnicy

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

różnica kwadratów

SKĄD BIERZE SIĘ ŚRODKOWY WYRAZ $2AB$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat to mnożenie nawiasu przez siebie. Wychodzą dwa takie same iloczyny ab — dlatego jest $2ab$, a nie ab . Jeśli kiedyś zapomnisz wzoru, wymnóż nawiasy i wyjdzie sam.

PRZYKŁAD — ROZWIJANIE

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \\ &= x^2 + 10x + 25\end{aligned}$$

PRZYKŁAD — ROZKŁADANIE

$$\begin{aligned}49 - y^2 &= 7^2 - y^2 \\ &= (7 - y)(7 + y)\end{aligned}$$

♦ WSKAZÓWKA

Widzisz różnicę dwóch kwadratów (np. $x^2 - 16$, $4a^2 - 9$)? Zawsze da się rozłożyć na dwa nawiasy. Widzisz sumę kwadratów ($x^2 + 16$)? Nie da się — i to jest poprawna odpowiedź.

Równania

08

SCHEMAT, KTÓRY DZIAŁA NA KAŻDE RÓWNANIE

- 1 Opuść nawiasy. Uwaga na minus przed nawiasem — zmienia znaki w środku.
- 2 Przenieś wszystkie x na lewą stronę, a liczby na prawą. Wyraz przeniesiony na drugą stronę zmienia znak.
- 3 Zredukuj: policz osobno wszystkie x -y i osobno liczby.
- 4 Podziel obie strony przez liczbę stojącą przy x .

TEN SAM SCHEMAT NA PRZYKŁADZIE

$$3(x - 2) = 5x + 4 \quad \text{równanie z zadania}$$

$$3x - 6 = 5x + 4 \quad \text{opuszczamy nawias}$$

$$3x - 5x = 4 + 6 \quad x\text{-y na lewo, liczby na prawo — ze zmianą znaku}$$

$$-2x = 10 \quad \text{redukujemy obie strony}$$

$$x = -5 \quad \text{dzielimy przez } -2$$

Sprawdzenie (zawsze warto): $3(-5 - 2) = -21$ i $5 \cdot (-5) + 4 = -21$. Zgadza się ✓

GDY W RÓWNANIU SĄ UŁAMKI

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 5$$

Pomnóż całe równanie przez wspólny mianownik (tu 6) i ułamki znikają: $2x + 3x = 30$, więc $x = 6$.

ZADANIE TEKSTOWE → RÓWNANIE

Za x podstaw to, o co pytają. Potem tłumacz zdanie po zdaniu: „o 5 więcej” to $x + 5$, „dwa razy tyle” to $2x$, „razem 40” to znak $= 40$.

♦ WSKAZÓWKA

Równanie to waga — cokolwiek robisz, rób to **po obu stronach**. Dodajesz 6 z lewej, dodaj 6 z prawej. Dzielisz przez 2 z lewej, podziel z prawej. Dopóki tego pilnujesz, nie da się zepsuć równania.

Pola i obwody

09

POLE CZY OBWÓD? ROZPOZNASZ TO PO TREŚCI ZADANIA

POLE — gdy coś **pokrywasz**: farba, trawa, kafelki, tapeta, folia. Jednostki: cm^2 , m^2 .

OBWÓD — gdy coś **otaczasz**: siatka, ogrodzenie, listwa, taśma, sznurek. Jednostki: cm, m.

WZORY NA POLA

kwadrat	$P = a^2$	$Ob = 4a$	bok razy bok
prostokąt	$P = a \cdot b$	$Ob = 2(a + b)$	dwa boki obok siebie
trójkąt	$P = \frac{1}{2}a \cdot h$		wysokość musi być do tego boku
równoległobok	$P = a \cdot h$		wysokość, nie drugi bok
romb	$P = a \cdot h$	$P = \frac{1}{2}e \cdot f$	z przekątnych, gdy je znasz
trapez	$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$		a, b to podstawy — te równoległe
koło	$P = \pi r^2$	$Ob = 2\pi r$	r to promień, połowa średnicy

PRZYKŁAD

Trapez o podstawach 8 cm i 12 cm i wysokości 5 cm:

$$P = \frac{1}{2}(8 + 12) \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$$

✦ WSKAZÓWKA

Dziwna figura? Podziel ją na prostokąty i trójkąty, policz pola osobno i dodaj. Albo domknij ją do prostokąta i odejmij to, co dodałeś.

Kąty

10

SUMY KĄTÓW

w trójkącie: 180°

w czworokącie: 360°

kąt pełny: 360° , półpełny: 180°

Znasz dwa kąty w trójkącie? Trzeci to 180° minus tamte dwa. To najczęstsze zadanie z kątów.

KĄTY PRZY PRZECINAJĄCYCH SIĘ PROSTYCH

wierzchołkowe (naprzeciw siebie) — równe

przyległe (obok siebie) — razem 180°

Naprzeciw = to samo. Obok = do prostej.

KĄTY W OKRĘGU

Kąt środkowy jest **dwa razy większy** od wpisanego

$$\alpha_{\text{środkowy}} = 2 \cdot \alpha_{\text{wpisany}}$$

Warunek: oba muszą być oparte na **tym samym łuku**. Środkowy ma wierzchołek w środku okręgu, wpisany — na okręgu.

Kąt oparty na średnicy to zawsze 90°

Jeśli w zadaniu jest trójkąt wpisany w okrąg, a jego bok przechodzi przez środek — to jest trójkąt prostokątny. Wtedy działa Pitagoras, nawet jeśli nikt tego nie napisał.

TRÓJKĄT RÓWNORAMIENNY

Kąty przy podstawie są równe. Znasz kąt przy wierzchołku α ? Każdy z dolnych to $(180^\circ - \alpha) : 2$.

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY

Wszystkie boki równe, więc wszystkie kąty też: każdy ma 60° . To warto mieć w głowie od razu.

♦ WSKAZÓWKA

W zadaniach z kątami **podpisuj rysunek** — każdy kąt, który obliczysz, zapisz od razu na obrazku. Po dwóch, trzech krokach zwykle „samo widać” brakujący kąt. Bez podpisywania łatwo policzyć ten sam kąt dwa razy albo zgubić się w rachunkach.

Twierdzenie Pitagorasa

11

WZÓR I JEDNA RZECZ, O KTÓREJ TRZEBA PAMIĘTAĆ

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Działa tylko w trójkącie prostokątnym. c to przeciwprostokątna — bok leżący naprzeciw kąta prostego, zawsze najdłuższy. a i b to przyprostokątne, czyli te, które tworzą kąt prosty.

SZUKASZ NAJDŁUŻSZEGO BOKU

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dwa krótsze boki dodajesz (po podniesieniu do kwadratu).

SZUKASZ KRÓTSZEGO BOKU

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Tu odejmujesz — i to zawsze od kwadratu najdłuższego boku.

PRZYKŁAD Z ŻYCIA, KROK PO KROKU

Drabina ma 5 m i opiera się o ścianę. Jej podstawa stoi 3 m od ściany. Na jakiej wysokości sięga?

- 1 Drabina, ściana i ziemia tworzą trójkąt prostokątny. Drabina jest najdłuższa, więc to ona jest $c = 5$.
- 2 Szukamy krótszego boku, więc odejmujemy: $h = \sqrt{5^2 - 3^2}$.
- 3 $h = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.
- 4 Odp.: drabina sięga na wysokość 4 m.

TRÓJKI, KTÓRE WARTO ZNAĆ NA PAMIĘĆ — OSZCZĘDZAJĄ LICZENIE

3 · 4 · 5

6 · 8 · 10

5 · 12 · 13

8 · 15 · 17

9 · 12 · 15

Jeśli w zadaniu widzisz dwie liczby z takiej trójki, trzecia jest od razu znana. Działa też po pomnożeniu wszystkich przez tę samą liczbę.

Trójkąty szczególne

12

Te dwa trójkąty pojawiają się w zadaniach bez przerwy — w kwadratach, prostokątach, trapezach i bryłach. Jeśli znasz ich proporcje, nie musisz liczyć Pitagorasa za każdym razem.

TRÓJKĄT $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

$$\text{boki} = a, a, a\sqrt{2}$$

To połowa kwadratu przeciętego po przekątnej.
Dwa boki równe, a najdłuższy jest $\sqrt{2}$ razy dłuższy.

TRÓJKĄT $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

$$\text{boki} = a, a\sqrt{3}, 2a$$

To połowa trójkąta równobocznego. Najkrótszy bok leży naprzeciw kąta 30° , najdłuższy jest dwa razy od niego dłuższy.

WZORY, KTÓRE Z NICH WYNIKAJĄ — TE TRZY RATUJĄ ŻYCIE

$$d = a\sqrt{2}$$

przekątna kwadratu o boku a

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

wysokość trójkąta równobocznego

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

pole trójkąta równobocznego

PRZYKŁAD

Kwadrat ma bok 6 cm. Jaka jest jego przekątna?

$$d = 6\sqrt{2} \approx 6 \cdot 1,41 = 8,49 \text{ cm}$$

✦ WSKAZÓWKA

Zostawiaj wynik z pierwiastkiem ($6\sqrt{2}$), chyba że zadanie każe zaokrąglić. Wynik z pierwiastkiem jest **dokładny** — zaokrąglony już nie.

GDZIE TE TRÓJKĄTY UKRYWAJĄ SIĘ W ZADANIACH

W kwadracie

Przekątna dzieli go na dwa trójkąty $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Dlatego przekątna to $a\sqrt{2}$.

W trójkącie równobocznym

Wysokość dzieli go na dwa trójkąty $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Dlatego wysokość to $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

W trapezie i bryłach

Gdy dorysujesz wysokość, prawie zawsze powstaje jeden z tych dwóch trójkątów — i dalej liczysz z proporcji.

Bryły

13

Oznaczenia: P_p – pole podstawy (spód bryły), P_b – pole boczne (wszystkie ściany z boku), P_c – pole całkowite (cała powierzchnia), V – objętość, H – wysokość bryły.

GRANIASTOSŁUP – MA DWIE PODSTAWY

$$V = P_p \cdot H$$

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Dwie takie same podstawy – góra i dół – dlatego w polu całkowitym mnożysz P_p przez 2.

OSTROSŁUP – MA JEDNĄ PODSTAWĘ I SZPIC

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$$

$$P_c = P_p + P_b$$

Jedna podstawa → nie mnożysz jej przez 2. I nie zgub $\frac{1}{3}$ w objętości.

SZEŚCIAN

$$V = a^3 \quad P_c = 6a^2$$

Sześć jednakowych kwadratowych ścian – stąd $6a^2$.

PROSTOPADŁOŚCIAN

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

Trzy pary jednakowych ścian.

PRZYKŁAD – OSTROSŁUP O PODSTAWIE KWADRATU

Podstawa to kwadrat o boku 6 cm, wysokość ostrosłupa to 10 cm. Jaka jest objętość?

1 Pole podstawy: $P_p = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$.

2 Wstawiasz do wzoru: $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 10$.

3 Odp.: $V = 120 \text{ cm}^3$ – objętość zawsze w jednostkach sześciennych.

♦ WSKAZÓWKA

Pole boczne najłatwiej policzyć z siatki bryły – rozłóż ją w myślach na płasko i policz pola poszczególnych ścian. W ostrosłupie ściany boczne to trójkąty, w graniastosłupie prostym – prostokąty.

Jednostki i prędkość

14

PRZELICZNIKI

długość

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

pole

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

objętość

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

pojemność

$$1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$$

masa

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$$

czas

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

DLACZEGO 1 M² TO NIE 100 CM²

Kwadrat o boku 1 m ma bok 100 cm, a jego pole to $100 \cdot 100 = 10\,000 \text{ cm}^2$. Przy **polach** przelicznik podnosisz do kwadratu, przy **objętościach** do sześcianu ($100^3 = 1\,000\,000$). Sama liczba 100 dotyczy tylko długości.

PRĘDKOŚĆ, DROGA, CZAS

$$v = \frac{s}{t} \quad s = v \cdot t \quad t = \frac{s}{v}$$

Wystarczy pamiętać jeden wzór — pozostałe dwa wynikają z przekształcenia. $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$.

PRZYKŁAD

Pociąg jedzie 90 km/h. Ile przejedzie w 40 minut?

$$40 \text{ min} = \frac{40}{60} \text{ h} = \frac{2}{3} \text{ h}$$

$$s = 90 \cdot \frac{2}{3} = 60 \text{ km}$$

♦ MINUTY TO NIE UŁAMEK DZIESIĘTNY

30 minut to 0,5 h, a nie 0,30 h. Godzina ma 60 minut, nie 100. Żeby zamienić minuty na godziny, **dziel** przez 60: 15 min = 0,25 h, 20 min = $\frac{1}{3}$ h, 45 min = 0,75 h.

MINUTY, KTÓRE WARTO ZNAĆ JAKO UŁAMEK GODZINY

minuty	15 min	20 min	30 min	40 min	45 min	90 min
jako godzina	0,25 h	$\frac{1}{3}$ h	0,5 h	$\frac{2}{3}$ h	0,75 h	1,5 h

Średnia, mediana, szansa

15

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

suma wszystkich liczb : ile ich jest

Uwaga: dzielisz przez liczbę danych, a nie przez największą z nich.

MEDIANA

wartość **środkowa** — ale najpierw ustaw dane rosnąco

Jeśli danych jest **parzysta** liczba, mediana to średnia dwóch środkowych.

PRZYKŁAD — DANE: 8, 3, 5, 3, 6

- 1 Porządkujesz rosnąco: 3, 3, 5, 6, 8
- 2 Mediana = liczba w środku = 5 (dwie liczby po lewej, dwie po prawej)
- 3 Średnia = $(3 + 3 + 5 + 6 + 8) : 5 = 25 : 5 = 5$

Tutaj wyszły takie same, ale zwykle się różnią — jedna bardzo duża liczba podnosi średnią, a medianą prawie nie rusza.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO — CZYLI JAKA JEST SZANSA

ile możliwości **mi sprzyja** : ile jest **wszystkich** możliwości

Rzut kostką, szansa na liczbę parzystą: sprzyjają 2, 4, 6 — czyli 3 możliwości z 6 wszystkich, więc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Wynik zawsze wychodzi między 0 (niemożliwe) i 1 (pewne) — jeśli wyszło Ci więcej niż 1, gdzieś jest błąd.

✦ WSKAZÓWKA

Przy prawdopodobieństwie **wypisz wszystkie możliwości**, jeśli nie jest ich dużo. Dla dwóch rzutów monetą: OO, OR, RO, RR — cztery możliwości, widać wszystko od razu. Wypisanie zajmuje chwilę, a zgadywanie kosztuje punkt.

Pułapki, przez które tracisz punkty

16

TAK ROBI WIĘKSZOŚĆ

1 $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

2 $5 - (2x - 3) = 5 - 2x - 3$

3 -20%, potem +20% → cena wyjściowa

4 $\sqrt{9 + 16} = 3 + 4 = 7$

5 $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm}^2$

6 „ile siatki na ogrodzenie” → liczysz pole

7 objętość ostrosłupa: $V = P_p \cdot H$

8 $2 + 3 \cdot 4 = 20$

9 do c^2 wstawiasz dowolny bok

10 $(x + 3) : 3 = x$

11 7, 2, 9 → mediana 2

12 30 min = 0,30 h

13 kończysz na wyniku „24” i idziesz dalej

A POPRAWNIE JEST

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$5 - (2x - 3) = 5 - 2x + 3$

$0,8 \cdot 1,2 = 0,96 \rightarrow \text{o } 4\% \text{ taniej}$

$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$

ogrodzenie, listwa, taśma → **obwód**

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

$2 + 3 \cdot 4 = 14$

 c leży naprzeciw kąta prostego

nic tu nie skrócisz

2, 7, 9 → mediana **7**

30 min = **0,5 h**

„Odp.: pole działki wynosi 24 m².”

Pułapka nr 13 to najtańszy punkt na całym egzaminie: w zadaniach otwartych zawsze dopisz odpowiedź zdaniem i z jednostką. Sam wynik w ramce często nie wystarcza.

Ostatni tydzień przed egzaminem

17

PLAN NA 7 DNI

- Dzień 1** Liczby, ułamki, procenty. Zrób 10 zadań z procentów — to najczęstszy temat na egzaminie.
- Dzień 2** Potęgi, pierwiastki, wyrażenia algebraiczne i wzory skróconego mnożenia.
- Dzień 3** Równania i zadania tekstowe. Ćwicz samo zapisywanie treści za pomocą x — to najtrudniejszy moment w tych zadaniach.
- Dzień 4** Geometria płaska: pola, obwody, kąty, twierdzenie Pitagorasa.
- Dzień 5** Bryły i jednostki. Przerysuj siatki graniastopuła i ostrostopuła — raz narysowane zapamiętuje się na dobre.
- Dzień 6** Cały arkusz z poprzednich lat, na czas, bez telefonu. Sprawdź i wypisz swoje błędy.
- Dzień 7** Tylko powtórka wzorów i listy pułapek. Zero nowych tematów. Wcześniej spać.

DO PLECAKA NA DZIEŃ EGZAMINU

- ✦ Legitymacja szkolna i czarny długopis — nie ścieralny
- ✦ Linijka, cyrkiel, ekierka
- ✦ Woda i coś małego do jedzenia
- ✦ Przeczytana rano lista pułapek
- ✦ Zegarek albo plan, ile czasu dajesz sobie na zadania zamknięte

TRZY ZASADY NA SAM EGZAMIN

- 1 **Najpierw łatwe.** Przejdź cały arkusz i zrób to, co umiesz od ręki.
- 2 **Zapisuj obliczenia.** Za drogę do wyniku też są punkty.
- 3 **Zostaw 10 minut na sprawdzenie jednostek i odpowiedzi.**

Nie zostawiaj pustych miejsc. Nawet zaczęte rozwiązanie bywa warte punkt — puste miejsce nigdy nie jest.

Dasz radę ✦

A jeśli chcesz przejść przez to z kimś, kto wytłumaczy Ci wszystko po ludzku — jestem tu. pinkmath.pl · [@pinkmath.korepetycje](https://pinkmath.korepetycje.pl)